



فصل سوم: ترکیبیات

درس اول: مباحثی در ترکیبیات

جایگشت با تکرار

(۱) با حروف کلمه بادبادک‌باز، چند کلمه ۱۰ حرفی می‌توان نوشت؟

۱۰ حرف

$$\frac{10!}{3! \times 3! \times 2!}$$

۳ تا (ب) ۳ تا (الف) ۲ تا (د)

(۲) به چند طریق می‌توان ۱۲ نفر را در دو اتاق ۵ نفره و ۳ نفره و دو اتاق ۲ نفره و ۲ نفره اسکان داد؟

$$\frac{12!}{5! \times 3! \times 2! \times 2!}$$

۲) به چند طریق می‌توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \xrightarrow[k=4]{n=9}$$

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

و یا منفی



پویش علمی
ماندگار البرز



(۳) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ با شرط $x_1 > 2$ و $x_2 \geq 4$ را تعیین کنید.

$$x_1 > 2 \rightarrow x_1 \geq 3 \rightarrow x_1 - 3 \geq 0$$

$$x_2 \geq 4 \rightarrow x_2 - 4 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \rightarrow$$

$$\underbrace{(x_1 - 3)}_{x'_1} + \underbrace{(x_2 - 4)}_{x'_2} + x_3 + x_4 = 12 - 3 - 4 \rightarrow$$

$$x'_1 + x'_2 + x_3 + x_4 = 5 \quad \begin{matrix} k=4 \\ n=5 \end{matrix}$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{1 \times 7 \times 6}{6} = 35$$



پویش علمی
ماندگار البرز



(۴) معادله $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 = 3$ ، چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

$$\sqrt{x_2} \in \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \rightarrow x_1 + x_3 = 3 \xrightarrow[k=2]{n=3} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{4}{1} = 4 \\ x_2 = 1 \rightarrow x_1 + 1 + x_3 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 = 2 \xrightarrow[k=2]{n=2} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3}{1} = 3 \\ x_2 = 4 \rightarrow x_1 + 2 + x_3 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 = 1 \xrightarrow[k=2]{n=1} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{2}{1} = 2 \\ x_2 = 9 \rightarrow x_1 + 3 + x_3 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 = 0 \xrightarrow[k=2]{n=0} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{1}{1} = 1 \\ x_2 = 16 \rightarrow x_1 + 4 + x_3 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 = -1 \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{1 + 2 + 3 + 4 = 10} \text{ تعداد جوابها}$$



مربع لاتین

۵) مربع‌های لاتین مقابل را در نظر بگیرید.

الف) کدام یک از دو مربع لاتین داده شده، چرخشی است؟

ب) آیا این دو مربع لاتین، متعامد هستند یا خیر؟ چرا؟

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

الف) B

ب)

$$AB = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 31 & 42 & 13 & 24 \\ \hline 44 & 31 & 22 & 13 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

AB =

سه متعامد هستند.



پویش علمی
ماندگارالبرز



۶) دو مربع لاتین 3×3 بنویسید که متعامد باشند.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

تعویض
ردیف دوم
و ستون سوم

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow AB = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 11 & 22 & 33 \\ \hline 32 & 13 & 21 \\ \hline 23 & 31 & 12 \\ \hline \end{array}$$

$\rightarrow A, B$ متعامد هستند.



پویش علمی
ماندگار البرز



به دست می‌آید. a و b را به دست آورید.

۳			b
۴	۳	۲	۱
۱		۳	
۲		۴	

با اعمال یک جایگشت بر روی مربع لاتین

۱	۲	۴	۳
۲		۳	
a	۳		۲
	۴		۱

(۷) مربع لاتین

بایک جایگشت

$A \rightarrow A'$

جایگشت:

۱	→	۴
۲	→	۳
۳	→	۱
۴	→	۲

$$\Rightarrow \begin{cases} b=۲ \\ a=۴ \end{cases}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



۸) قرار است ۳ کارگر در ۳ روز هفته با ۳ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۳ نوع الیاف کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کند. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.



پویش علمی
ماندگار البرز



برنامه‌ریزی با دو مربع لاسی **مسی** است که ادلی برابر ماشین نخ‌ریسی

و دومی برابر الیاف است. اگر کارگر را با a, b, c و سه روز هفته را با a, b, c و دو شنبه نام‌گذاری کنیم، برنامه‌ریزی عبارت است از:

$A =$ شنبه
دو شنبه

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
دو شنبه	۳	۱	۲
سه شنبه	۲	۳	۱

$B =$ شنبه
دو شنبه

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
دو شنبه	۲	۳	۱
سه شنبه	۳	۱	۲

$AB =$ شنبه
دو شنبه
سه شنبه

	a	b	c
شنبه	۱۱	۲۲	۳۳
دو شنبه	۳۲	۱۳	۲۱
سه شنبه	۲۳	۳۱	۱۲

درس دوم: روش‌هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

۹ اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود، حداکثر چند رمز را برای باز کردن قفل باید آزمایش کرد؟

۱۰ رقم $\rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 9\}$: ارقام رمز

$A_1 =$ رمزها فاقد رقم ۷

$A_2 =$ رمزها فاقد رقم ۸

$$\rightarrow |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |\overline{A_1 \cup A_2}| \stackrel{\text{عدم شمول}}{=} |S| - |A_1 \cup A_2|$$

$$= |S| - (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) = 10^4 - (9^4 + 9^4 - 8^4)$$

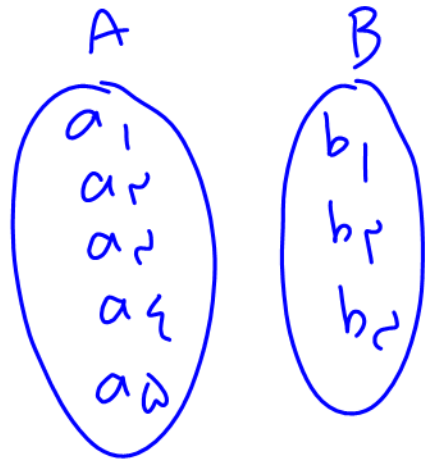


پویش علمی
ماندگار البرز



۱۰ چند تابع از مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ به مجموعه $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ می‌توان تعریف کرد که برد تابع برابر با مجموعه B باشد،

یعنی پوشا باشد؟ (با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، راه حل به طور کامل نوشته شود)



$$A_i \text{ یعنی } \rightarrow |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = ?$$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|)$$

$$= 2^5 - (2^5 + 2^5 + 2^5 - 1^5 - 1^5 - 1^5 + 0) = 2^5 - 3 \times 2^5 + 3 = 2^4 - 9 + 3 = 15$$



پویش علمی
ماندگار البرز



(الف) به چند طریق می‌توان ۶ کتاب متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرطی که به هر نفر حداقل یک کتاب برسد؟

(ب) به چند طریق می‌توان ۶ کتاب یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرطی که به هر نفر حداقل یک کتاب برسد؟



پویش علمی
ماندگار البرز



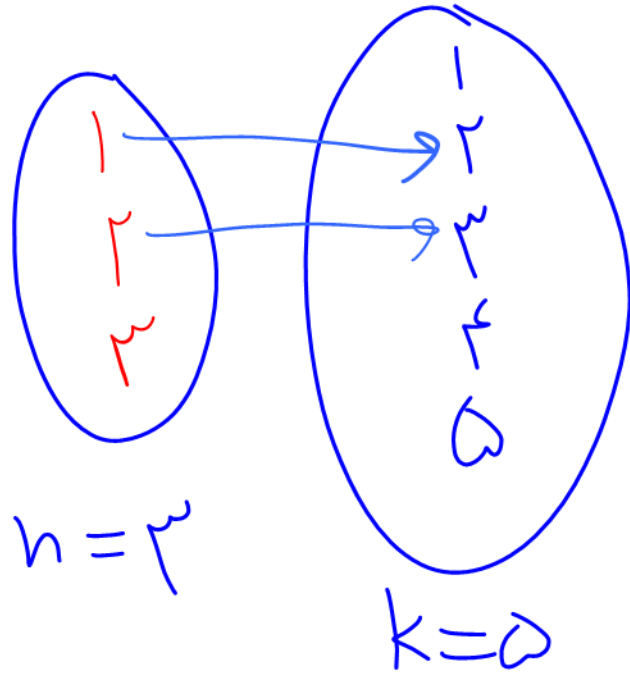
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

$$\text{تعداد توابع پوش از ۶ عضو به ۳ عضو (الف)} = 3^6 - 3 \times 2^6 + 3 = 729 - 192 + 3$$

$$\text{تعداد جواب‌ها برطبیعی} = 6 \xrightarrow[k=3]{n=6} \binom{n-1}{k-1} = \binom{5}{2} = 10$$

$$\text{تعداد توابع پوش از } n \text{ عضو به } 3 \text{ عضو} = 3^n - 3 \times 2^n + 3$$

۱۲) چند تابع یک به یک از مجموعه $\{1, 2, 3\}$ به مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ وجود دارد؟



انتی‌جبر ۳ انتی‌جبر ۲ انتی‌جبر ۱
 تعداد انتی‌جبر ۱
 $=$ تعداد توابع یک به یک
 $= 3 \times 4 \times 5 = 60$

$$\text{تعداد توابع یک به یک} = \frac{k!}{(k-n)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$



پویش علمی
ماندگار البرز



اصل لانه کبوتر

۱۳) در یک سالن ۸۵ نفر قرار دارند. نشان دهید که حداقل دو نفر وجود دارند که ماه و روز تولد یکسانی (در هفته) دارند.

$$\begin{cases} m = 85 \text{ (کبوترها)} \\ n = 12 \times 7 = 84 \text{ (لانه‌ها)} \end{cases} \quad \frac{m > n}{\text{اصل لانه کبوتر}} \quad \begin{array}{l} \text{حداقل ۲ نفر با ماه و روز تولد یکسان} \\ \text{وجود دارند.} \end{array}$$

پویش علمی
ماندگار البرز

۱۴) ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه، حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانه ۴ هم‌نهشت هستند؟

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \text{۵ عدد طبیعی دلخواه}$$

از تعریف a_i بر ۴ داریم: $a_i = 4q + r$ که $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$\begin{cases} m = 5 & (\text{تعداد } a_i \text{ ها}) \\ n = 4 & (\text{تعداد باقی مانده ها}) \end{cases}$$

$$\frac{m > n}{\text{اصل لانه کبوتر}}$$

→ حداقل ۲ عدد a_i و a_j باقی مانده یکسان r بر ۴ دارند

$$\begin{cases} a_i = 4q + r \\ a_j = 4q' + r \end{cases} \Rightarrow a_i - a_j = 4(q - q') = 4q'' \Rightarrow 4 \mid a_i - a_j \rightarrow a_i \equiv a_j \pmod{4}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



۱۵ مجموعه اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ است. A

۴۲ مجموعه $\rightarrow \{42, 43\}, \dots, \{82, 83\}, \{1, 84\}$: مجموعه‌ها ۲ عضو با مجموع ۸۵

$$\begin{cases} m = 43 & \text{(کبوترها)} \\ & \text{اعداد انشی‌بی از } A \\ n = 42 & \text{(انه‌ها)} \\ & \text{(زیر مجموعه‌ها، ۲ عضو با مجموع ۸۵)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[m \text{ اصل لانه کبوتر}]{m > n}$$

$\rightarrow$ حداقل ۲ عضو از یک مجموعه ۲ عضو انشی‌بی شود

$$15 = \text{مجموع آن دو عضو}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



۱۶) نشان دهید که اگر ۵ نقطه در یک مربع به ضلع ۲ واحد قرار گیرند، حداقل ۲ نقطه وجود دارد که فاصله‌شان کمتر از $\sqrt{2}$ می‌باشد.



پویش علمی
ماندگار البرز



(۱۷) در یک مدرسه، ۳۵۰ دانش‌آموز حضور دارند. حداقل چند دانش‌آموز ماه تولد یکسانی دارند؟



پیش‌علمی
ماندگارالبرز



۵۴(۱۸) شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار دارد؟



پویش علمی
ماندگارالبرز



۱۹) ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر بگیرید. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد به طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح است؟



پویش علمی
ماندگار البرز

